

Variabes aléatoire réelles

Déterminer une loi de probabilité

Exercice 1 Une urne contient trente boules numérotées de 1 à 30. On tire au hasard une boule. Si le numéro de la boule est compris entre 1 et 15, on gagne 2€, s'il est compris entre 16 et 27, on gagne 10€. Sinon on gagne 50 €. On note X la variable aléatoire donnant le gain à chaque boule tirée au sort.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2. Établir le tableau donnant la loi de probabilité de X .

Exercice 2 Dans une entreprise, il y a 500 employés. La tableau de répartition des salaires est le suivant. On note Y la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort dans l'entreprise.

Salaire en euro	1600	2000	2500	3000
Nombres de personnes	300	150	45	5

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?
2. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de Y .

Exercice 3 On lance deux dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus grand numéro obtenu sur les deux dés. Déterminer la loi de probabilités de X .

Exercice 4 Une variable aléatoire peut prendre les valeurs -120 ; 0 ; 150 ; 300 ; et 1000 . Définir par une phrase et donner les issues possibles des évènements suivants.

1. $\{X = 150\}$
2. $\{X = 10\}$
3. $\{X > 100\}$
4. $\{X = 300\}$
5. $\{X \geq 300\}$
6. $\{X \leq 0\}$

Exercice 5 On lance 15 fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de « 6 » obtenu sur les 15 lancers.

Utiliser une notation pour écrire les probabilités des évènements suivants :

1. Le dé est tombé cinq fois sur « 6 »
2. Le dé est tombé au moins une fois sur « 6 »
3. Le dé est tombé au plus trois fois sur « 6 »
4. Le dé est tombé plus de dix fois sur « 6 »

Exercice 6 La loi de probabilité de X est donnée par la tableau :
Déterminer les probabilités suivantes :

x_i	0	2	3	5	7
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

1. $\{X = 5\}$
2. $\{X \leq 5\}$
3. $\{X > 5\}$
4. $\{X \geq 2\}$
5. $\{X = 0\}$
6. $\{0 < X < 5\}$

Calculer et utiliser une espérance

Exercice 7 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-2	1	11
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X .
2. Vérifier le résultat avec la calculatrice.

Exercice 8 On considère un jeu de hasard. la variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumé dans le tableau ci-dessous.

x_i	-5	-2	0	50
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,28	0,02

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2. Interpréter ce résultat.
3. Ce jeu est-il équitable?

Exercice 9 Alice mise 3€ puis lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Elle gagne une valeur en euros égales au double du numéro affiché par le dé. Quel montant peut-elle espérer gagner (ou perdre) en moyenne si elle joue un très grand nombre de parties à ce jeu?

Exercice 10 Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Après un lancer, on fait la somme des numéros des faces. La mise de départ est $m \text{ €}$ (m étant un nombre réel positif). Puis :

- On gagne 10 € si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6.
- On gagne 20 € si on obtient un résultat inférieur à 4.
- On gagne rien sinon.

1. Pour cette question, on prend $m = 5$. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Déterminer $E(X)$. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur?
2. Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable?

Exercice 11 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-contre :

x_i	-100	5	10	20
$P(X = x_i)$	p	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

1. Si $p = 0,2$, calculer l'espérance de X .
2. Calculer p pour que l'espérance de X soit égale à 4.

Simuler une variable aléatoire

- La fonction `Alea()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 exclu.
- Pour tous les programmes python, le module `random` est importé et la commande `random.random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1 exclu.

Exercice 12 Y est une variable aléatoire donnant un gain à un jeu. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

y_i	-5	0	4
$P(Y = y_i)$	0,80	0,12	0,08

On souhaite construire une simulation de la variable aléatoire Y .

1. Compléter le tableau suivant donnant un découplage de $[0; 1]$ permettant de satisfaire aux probabilités

y_i	-5	0	4
$P(Y = y_i)$	Entre 0 et ... inclus	Entre ... et 0,92 inclus	Entre 0,92 et 1 exclus

2. Compléter l'algorithme ci-dessus permettant d'obtenir une valeur prise par la variable aléatoire Y .

Exercice 13 Une valeur prise par une variable aléatoire X est obtenue avec le programme suivant. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

```

1 alea = alea()
2 Si alea <= 0.8
3     Afficher "..."
4 Fin Si
5 Si alea <= ... et alea > ...
6     Afficher "5"
7 Fin Si
8 Si alea > ...
9     Afficher "..."
10 Fin Si
    
```

```

1 alea = random.random()
2 if alea <= 0.72 :
3     print("-8")
4 if alea <= 0.95 and alea >0.72 :
5     print("50")
6 if alea > 0.95 :
7     print("80")
    
```

Exercice 14 Une entreprise fabrique des centrifugeuses. Son service de qualité a relevé le nombre d'années entières (donc arrondi) écoulées avant la première panne pour chacune des centrifugeuses d'un échantillon. Ces données ont permis de donner des estimations des probabilités pour ces durées avant la première panne.

Christian a écrit le programme ci-contre permettant de simuler le nombre d'années entières avant la première panne pour une centrifugeuse. Si le programme affiche « 2 ans », cela signifie qu'une centrifugeuse a fonctionné 2 ans (entier) avant la première panne.

```

1 import random
2 alea=random.random()
3 if alea <= 1/6:
4     print("2 ans")
5 if alea > 1/6 and alea <= 0.5:
6     print("4 ans")
7 if alea > 0.5:
8     print("5ans")
    
```

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'années entières écoulées avant la première panne. Donner la loi de probabilité de X .
2. Est-il vrai qu'une centrifugeuse tombera en panne avant 7 ans?
3. Quelle est la durée moyenne avant qu'une centrifugeuse ne tombe en panne?